EQUAZIONI DIFFERENZIALI

LEZIONE 1

Il problema di Cauchy

Siano $f: \underset{\subseteq \mathbb{R}^2}{\overset{\text{aperto}}{\Omega}} \to \mathbb{R}$ e $(t_0, x_0) \in \Omega$. Una soluzione del problema di Cauchy

$$(PC) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

è una coppia (φ, I) costituita da una funzione $\varphi: I \to \mathbb{R}$ differenziabile in I tale che

(i) $(t_0 \in I$ e$)$ $\varphi(t_0) = x_0$

(ii) $(t, \varphi(t)) \in \Omega \quad \forall t \in I$

(iii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in I$

Problemi: (i) determinare condizioni su f che garantiscano esistenza e/o unicità del problema (PC);
(ii) calcolare, quando possibile, la/e soluzione/i di PC.

Teorema Siano Ω, f, t_0, x_0 come sopra e assumiamo f continua. Sono equivalenti:

(i) (φ, I) risolve il problema di Cauchy (PC)

(ii) φ è una soluzione continua in I dell'equa-

zione di tipo Volterra

$$(*) \qquad x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) Per ipotesi $\varphi'(s) = f(s, \varphi(s))$ $\forall s \in I$. Integrando ambo i membri e tenendo conto della condizione iniziale $\varphi(t_0) = x_0$, otteniamo

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \forall t \in I,$$

cioè φ è una soluzione continua dell'equazione di Volterra $(*)$

(ii) $\Rightarrow$ (i) La funzione $s \mapsto f(s, \varphi(s))$ è continua in I (perché composizione di funzioni continue). Poiché

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds \qquad \forall t \in I,$$

φ è diff.le in I per il Teorema fondamentale del calcolo. È immediato verificare che φ soddisfa (PC) $\square$

Teorema Siano Ω, f, t_0, x_0 come all'inizio della lezione. Valgono le seguenti:

(i) (Peano) se $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ allora (PC) ha almeno una soluzione. Più precisamente, se $R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset \Omega$ e poniamo

$$M = \max_R |f| \qquad \alpha := \min\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

allora (PC) ha almeno una soluzione in $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$

(ii) se $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ ed è localmente lipschitziana rispetto a x, uniformemente rispetto a t, allora (PC) ha un'unica soluzione in un opportuno intorno di t_0. Più precisamente, se R, M, α sono come in (i), allora (PC) ha una e una sola soluzione in $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

Dim. (i) vd. Coddington-Levinson, Theory of ordinary differential equations, p. 6.

(ii) Per il teorema precedente, (φ, I) risolve (PC) se e solo se φ è una soluzione continua dell'equazione di Volterra (*). Sia L la costante di Lipschitz di f in R. L'analisi dell'equazione di Volterra sviluppata nella Lezione sulle contrazioni in spazi metrici assicura che, nelle ipotesi di (ii), l'equazione di Volterra (*) ha un'unica soluzione continua φ_0 in

$$\bar{I}_0 := [t_0 - r_0, t_0 + r_0], \text{ dove } r_0 := \min\left\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{2L}\right\}.$$

Se $\alpha = r_0$, la dimostrazione di (ii) è conclusa.

Supponiamo che $\alpha > r_0$. Poniamo

$$t_1 := t_0 + r_0 \qquad x_1 := \varphi_0(t_0 + r_0) \qquad P_1 := (t_1, x_1).$$

Osserviamo che $P_1 \in R$. Infatti $t_1 - t_0 = r_0 < \alpha$ e

$$\begin{aligned} |x_1 - x_0| = |\varphi_0(t_1) - x_0| &= \left|\int_{t_0}^{t_1} f(s, \varphi(s))\, ds\right| \\ &\leq M(t_1 - t_0) \\ &= M/(2L) \\ &< b. \end{aligned}$$

Sia ora R_1 il rettangolo centrato in P_1 con semilati

$$a_1 := a - \frac{1}{2L} \qquad b_1 := b - \frac{M}{2L}$$

Osserviamo che $R_1 \subset R$. Basta mostrare che $t_1 + a_1 \leq t_0 + a$ e che $x_0 - b \leq x_1 - b_1 < x_1 + b_1 \leq x_0 + b$. La prima è ovvia, poiché addirittura

$$\frac{1}{2L} = t_1 - t_0 = a - a_1 = \frac{1}{2L}.$$

La seconda equivale a $|x_1 - x_0| \leq b - b_1 \left(= \frac{M}{2L}\right)$. Per dimostrarla, osserviamo che

$$\begin{aligned} |x_1 - x_0| = |\varphi_0(t_1) - \varphi_0(t_0)| &= \left| \int_{t_0}^{t_1} f(s, \varphi_0(s))\, ds \right| \\ &\leq M\,(t_1 - t_0) \\ &= \frac{M}{2L}. \end{aligned}$$

Ripetendo la prima parte della dimostrazione con R_1 al posto di R (L è costante di Lipschitz per f ristretta a R_1) otteniamo che l'eq. di Volterra

$$x(t) = x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

ha un'unica soluzione continua φ_1 in

$$I_1 := [t_1 - r_1, t_1 + r_1], \quad \text{dove} \quad r_1 := \min\left\{ a_1, \frac{b_1}{M}, \frac{1}{2L} \right\}.$$

Allora la funzione

$$\varphi(t) := \begin{cases} \varphi_0(t) & \forall t \in [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \\ \varphi_1(t) & \forall t \in [t_1, t_1 + r_1] \end{cases}$$

è soluzione dell'eq. di Volterra

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

in $[t_0 - r_0, t_1 + r_1]$, poiché φ_0 lo è in $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ e se $t \in [t_1, t_1 + r_1]$, allora

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= x_1 + \int_{t_1}^{t} f(s, \varphi_1(s))\, ds \\
&= \varphi_0(t_1) + \int_{t_1}^{t} f(s, \varphi_1(s))\, ds \\
&= x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, \varphi_0(s))\, ds + \int_{t_1}^{t} f(s, \varphi_1(s))\, ds \\
&= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds
\end{aligned}$$

Se $r_1 = \min\left\{ a_1, \frac{b_1}{M} \right\}$, allora

$$\begin{aligned}
r_0 + r_1 &= \min\left\{ a_1 + \frac{1}{2L}, \frac{b_1}{M} + \frac{1}{2L} \right\} = \min\left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \\
&= \alpha
\end{aligned}$$

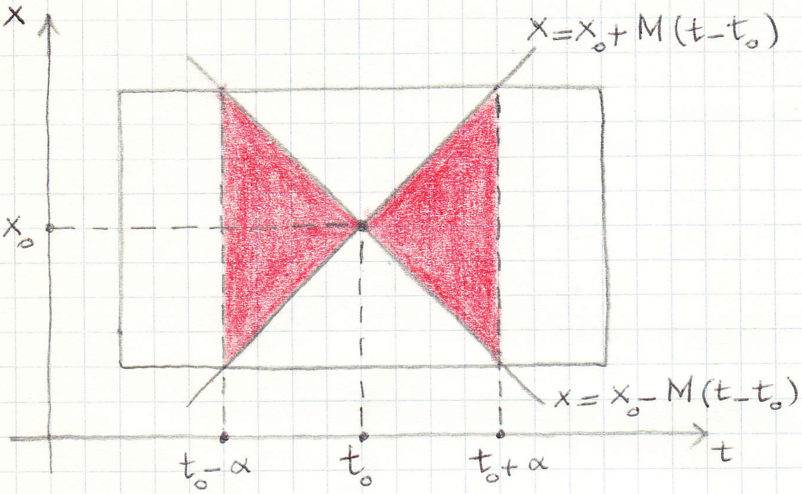
e la dimostrazione di (ii) è conclusa.

Se $r_1 = \frac{1}{2L}$, allora si itera il procedimento.

È chiaro che in un numero finito di passi si giunge a prolungare φ_0 a una soluzione φ su $[t_0 - r_0, t_0 + \alpha]$. Si procede poi in modo analogo per prolungare φ_0 a sinistra di t_0. $\square$

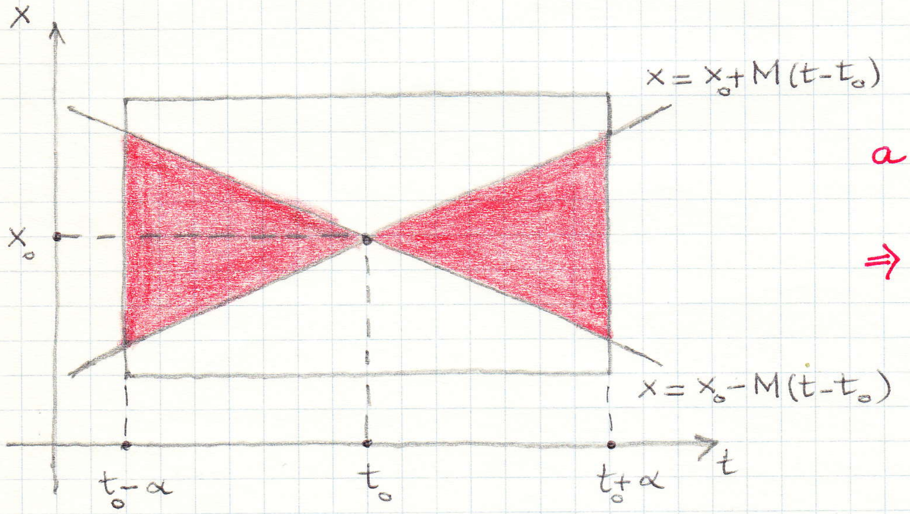
Manteniamo la notazione precedente e poniamo

$$\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$



$a > \frac{b}{M}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{b}{M}$



$a < \frac{b}{M}$

$\Rightarrow \alpha = a$

La soluzione di (PC) rimane nella regione rossa

Corollario Sia $f \in \mathscr{C}^1(\Omega)$. Allora per ogni $(t_0, x_0) \in \Omega$ esiste una e una sola soluzione di

$$(PC) \qquad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

in un opportuno intorno di t_0.

Dim. Segue dal teorema precedente e dal fatto che una funzione di classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ è localmente lipschitziana (in senso forte). $\square$

LEZIONE 2

ALCUNE OSSERVAZIONI

SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI*

Stefano Meda

1. Equazioni a variabili separabili

In questo paragrafo discuteremo della buona posizione secondo Hadamard (esistenza, unicità e dipendenza continua dai dati iniziali) del problema di Cauchy associato a un'equazione differenziale *a variabili separabili.*

Siano I e J due intervalli di $\mathbf{R}$, h e f due funzioni a valori reali definite rispettivamente in I e J. Dati τ e ξ punti interni a I e J, si consideri il problema di Cauchy

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} x' = h(t)\, f(x) \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Senza ulteriori ipotesi, (PC) può non avere soluzioni, come mostrano gli esempi seguenti.

Esempio 1.1. Siano $I = J = \mathbf{R}$, $\tau = 0$, e

$$h(t) = \frac{1 + \operatorname{sgn} t}{2}, \qquad f(x) = 1.$$

La funzione h presenta una discontinuità di prima specie nel punto 0; essa non può quindi essere in un intorno dell'origine la derivata di alcuna funzione per il teorema di Darboux (sulla proprietà dei valori intermedi delle derivate di funzioni reali di una variabile reale).

Esempio 1.2. Si consideri ora il caso $I = J = \mathbf{R}$, $\tau = \xi = 0$, e

$$h(t) = 1, \qquad f(x) = \frac{1 + \operatorname{sgn} x}{2}.$$

Supponiamo che (PC) abbia una soluzione (ϕ, I_1), dove I_1 indica un intervallo aperto contenente 0. Dall'equazione si ricava che $\phi'(0) = 1/2$. Per continuità deve essere $\phi < 0$ in

* Note redatte ad uso degli studenti del secondo anno di Matematica e di Fisica dell'Università di Milano-Bicocca

un intorno sinistro di 0 e $\phi > 0$ in un intorno destro di 0. Dunque esistono a in $\mathbf{R}^-$ e b in $\mathbf{R}^+$ tali che $\phi(t) < 0$ in $(a, 0)$, $\phi(t) > 0$ in $(0, b)$, e ϕ è soluzione di

$$x' = 0$$

a sinistra di 0 e di

$$x' = 1$$

a destra di 0. Ma allora deve essere $\phi(t) = 0$ in $(a, 0)$ e $\phi(t) = t$ in $(0, b)$. Ciò è incompatibile con la condizione $\phi'(0) = 1/2$.

Proposizione 1.4. *Siano I e J due intervalli di $\mathbf{R}$, h in $C(I)$ e f in $C(J)$. Dati τ e ξ punti interni a I e J, il problema di Cauchy*

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} x' = h(t)\, f(x) \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

ha almeno una soluzione (ϕ, I_1). Nel caso in cui $f(\xi) \neq 0$, ϕ soddisfa l'equazione

$$(1) \qquad \int_\xi^{\phi(t)} \frac{1}{f(v)}\, dv - \int_\tau^t h(s)\, ds = 0 \qquad \forall t \in I_1.$$

Dim. Se $f(\xi) = 0$, allora la funzione costante $\phi(t) = \xi$ è soluzione di (PC) su tutto I.

Sia ora $f(\xi) \neq 0$. Poiché f è continua in ξ, essa è non nulla in un opportuno intorno di ξ. La funzione

$$F(t, x) = \int_\xi^x \frac{1}{f(v)}\, dv - \int_\tau^t h(s)\, ds$$

è di classe C^1 in un intorno di (τ, ξ) e $F(\tau, \xi) = 0$. Per il teorema di Dini, l'equazione $F(t, x) = 0$ definisce implicitamente, in un intorno I_1 del punto τ, una ed una sola funzione ϕ di classe C^1 tale che $\phi(\tau) = \xi$. Di conseguenza, utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni composte,

$$0 = D_t(F(t, \phi(t))) = \frac{\phi'(t)}{f(\phi(t))} - h(t) \qquad \forall t \in I_1,$$

ovvero (ϕ, I_1) è soluzione del (PC) assegnato, come richiesto. □

Come si fa a intuire che se $f(\xi) \neq 0$, allora (PC) è risolto dalla formula (1)? Il ragionamento seguente fornisce un'altra dimostrazione della Proposizione 1.1.

Se (PC) ha una soluzione (ϕ, I_1), e $f(\xi) \neq 0$, allora

$$\frac{\phi'(s)}{f(\phi(s))} - h(s) = 0 \qquad \forall s \in I_1.$$

Integrando ambo i membri tra τ e t, si ottiene

$$\int_\tau^t \frac{\phi'(s)}{f(\phi(s))}\, dv = \int_\tau^t h(s)\, ds \qquad \forall t \in I_1.$$

Sia ora G una primitiva di $v \mapsto 1/f(v)$. Allora

$$D_t(G \circ \phi)(t) = \frac{\phi'(t)}{f(\phi(t))} \qquad \forall t \in I_1.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\int_\tau^t \frac{\phi'(s)}{f(\phi(s))}\, ds &= (G\circ\phi)(t) - (G\circ\phi)(\tau) = (G\circ\phi)(t) - G(\xi)\\ &= \int_\xi^{\phi(t)} \frac{1}{f(v)}\, dv.\end{aligned}$$

In conclusione, deve essere

$$\int_\xi^{\phi(t)} \frac{1}{f(v)}\, dv = \int_\tau^t h(t) \qquad \forall t \in I_1.$$

Esempio 1.5 Applichiamo la formula risolutiva alla famiglia di problemi

$$(\mathrm{PC}_\alpha) \qquad \begin{cases} x' = |x|^\alpha \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

dove α è un parametro reale positivo.

Se $\xi = 0$, la funzione identicamente nulla è soluzione su tutto $\mathbf{R}$.

Sia $\xi \neq 0$; una soluzione del problema si ottiene dalla formula risolutiva

$$\int_\xi^{\phi_{\alpha;\tau,\xi}(t)} |v|^{-\alpha}\, dv = t - \tau;$$

la notazione utilizzata evidenzia il fatto che la soluzione $\phi_{\alpha;\tau,\xi}$ dipende dal parametro α e dal punto iniziale (τ, ξ).

Supponiamo ad esempio che $\xi > 0$ (il caso $\xi < 0$ si tratta in modo analogo). Allora $\phi_{\alpha;\tau,\xi}$ è positiva in un intorno di τ per continuità.

Se $\alpha = 1$ si ottiene la formula

$$\operatorname{sgn} v \,\log|v|\,\Big|_\xi^{\phi_{\alpha;\tau,\xi}(t)} = t - \tau,$$

equivalente, in un intorno di τ (precisamente nell'intorno in cui $\phi_{\alpha;\tau,\xi}$ rimane positiva) a

$$\log v\Big|_{\xi}^{\phi_{\alpha;\tau,\xi}(t)} = t - \tau,$$

da cui

$$\phi_{\alpha;\tau,\xi}(t) = \xi\, \mathrm{e}^{t-\tau},$$

che fornisce una soluzione su tutto $\mathbf{R}$.

Se $\alpha \neq 1$ si ha

$$\operatorname{sgn} v\, \frac{|v|^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{\xi}^{\phi_{\alpha;\tau,\xi}(t)} = t - \tau,$$

equivalente, in un intorno di τ (precisamente nell'intorno in cui $\phi_{\alpha;\tau,\xi}$ rimane positiva) a

$$\frac{v^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_{\xi}^{\phi_{\alpha;\tau,\xi}(t)} = t - \tau.$$

Si ha perciò

$$\phi_{\alpha;\tau,\xi}(t) = \big[(1-\alpha)(t-\tau) + \xi^{1-\alpha}\big]^{1/(1-\alpha)}. \tag{2}$$

Poniamo $\omega_{\alpha,\tau,\xi} := \tau + \dfrac{\xi^{1-\alpha}}{(\alpha-1)}$. Notiamo che per "generici" valori di α, l'espressione (2) ha senso solo se $\alpha < 1$ e $t > \omega_{\alpha,\tau,\xi}$, oppure $\alpha > 1$ e $t < \omega_{\alpha,\tau,\xi}$. Osserviamo che se $\alpha > 1$

$$\lim_{t\to\omega_{\alpha,\tau,\xi}-} \phi_{\alpha;\tau,\xi}(t) = +\infty;$$

$\phi_{\alpha;\tau,\xi}$ non può evidentemente essere prolungata a sinistra di $\omega_{\alpha,\tau,\xi}$ (rimanendo soluzione). Se $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{t\to\omega_{\alpha,\tau,\xi}+} \phi_{\alpha;\tau,\xi}(t) = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t\to\omega_{\alpha,\tau,\xi}+} \phi'_{\alpha;\tau,\xi}(t) = 0;$$

quindi la funzione

$$\widetilde{\phi}_{\alpha;\tau,\xi}(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in (-\infty, \omega_{\alpha,\tau,\xi}] \\ \phi_{\alpha;\tau,\xi}(t) & \forall t \in (\omega_{\alpha,\tau,\xi}, \infty) \end{cases}$$

è soluzione di (PC_α) su tutto $\mathbf{R}$. Poiché $\omega_{\alpha,\tau,\xi}$ può assumere tutti i valori reali positivi, l'analisi svolta mostra che se $0 < \alpha < 1$, e $\xi = 0$, allora (PC_α) ha infinite soluzioni.

Esercizio. Si completi l'analisi di (PC_α) trattando il caso $\alpha \leq 0$ e $\xi < 0$.

In vista della successiva Proposizione 1.6 può essere interessante notare che la funzione $x \mapsto |x|^\alpha$ è hölderiana di grado α ma non lipschitziana in un intorno di 0.

Proposizione 1.6. *Siano I e J due intervalli di $\mathbf{R}$, h in $C(I)$ e f in $Lip(J)$. Dati τ e ξ punti interni a I e J, il problema di Cauchy*

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} x' = h(t)\, f(x) \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione.

Dim. L'esistenza di una soluzione è stata stabilita nella Proposizione 1.1. Siano (ϕ_1, I_1) e (ϕ_2, I_2) due soluzioni di (PC). Posto $I = I_1 \cap I_2$, sia $\Phi : I \to \mathbf{R}$ la funzione $\Phi = \phi_1 - \phi_2$. Indicata con L la costante di Lipschitz di f, si ha che

$$\begin{aligned} |\Phi'(t)| &= |h(t)|\, |f(\phi_1(t)) - f(\phi_2(t))| \\ &\leq \|h\|_\infty\, L\, |\phi_1(t) - \phi_2(t)| \\ &= \|h\|_\infty\, L\, |\Phi(t)|\,. \end{aligned}$$

Se Φ non è identicamente nulla in I, esiste un punto $\bar{t}$ di I tale che $\Phi(\bar{t})$ è diverso da 0, per esempio positivo. Supponiamo che $\bar{t} > \tau$ (il caso $\bar{t} < \tau$ si tratta in modo analogo). Indichiamo con t_0 l'estremo superiore dell'insieme $\{t \in [\tau, \bar{t}) : \Phi(t) = 0\}$. Nell'intervallo $(t_0, \bar{t}]$ la funzione Φ è positiva (perché?) e quindi soddisfa la stima

$$|(\log \Phi)'(t)| \leq \|h\|_\infty\, L,$$

che è equivalente a

$$-\|h\|_\infty\, L \leq (\log \Phi)'(t) \leq \|h\|_\infty\, L.$$

Integrando la relazione precedente tra t e $\bar{t}$, si ottiene

$$\Phi(\bar{t})\, \mathrm{e}^{-\|h\|_\infty\, L\, (\bar{t}-t)} \leq \Phi(t) \leq \Phi(\bar{t})\, \mathrm{e}^{\|h\|_\infty\, L\, (\bar{t}-t)}.$$

Per la continuità di Φ si deve avere

$$0 = \Phi(t_0) = \lim_{t \to t_0+} \Phi(t) \geq \Phi(\bar{t})\, \mathrm{e}^{-\|h\|_\infty\, L\, (\bar{t}-t_0)} > 0.$$

Quindi Φ deve essere identicamente nulla in $I \cap \{t > \tau\}$, cioè ϕ_1 e ϕ_2 coincidono in tale intervallo. In modo analogo si mostra che ϕ_1 e ϕ_2 coincidono in $I \cap \{t < \tau\}$.

Questo conclude la dimostrazione della proposizione. $\square$

2. Studio qualitativo delle soluzioni

Data un'equazione del primo ordine in forma normale,

$$x' = F(t,x), \tag{1}$$

ci proponiamo di fornire qualche indicazione utile al fine di tracciare un grafico qualitativo delle sue soluzioni.

La prima questione che si presenta è quella dell'esistenza locale di eventuali soluzioni della (1), passanti per un fissato punto (τ, ξ). Indichiamo con (PC) il problema di Cauchy

$$x' = F(t,x) \qquad x(\tau) = \xi. \tag{1}$$

Ricordiamo il teorema di Peano.

Teorema 2.1. *Sia $R = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : |t-\tau| \leq a, |x-\xi| \leq b\}$. Supponiamo che F sia in $C(R)$ e siano*

$$M = \max_R |F|, \qquad \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Allora (PC) ha una soluzione definita nell'intervallo $[\tau-\alpha, \tau+\alpha]$.

Conseguenza del teorema di Peano è che se F è continua in un aperto Ω di $\mathbf{R}^2$, allora (PC) ha almeno una soluzione definita in un opportuno intorno di τ.

Osservazione 2.2. (a) La continuità di F non è sufficiente ad assicurare l'unicità della soluzione di (PC). Basta considerare il problema

$$(\mathrm{PC}_\alpha) \qquad \begin{cases} x' = |x|^\alpha \\ x(\tau) = 0, \end{cases}$$

dove $0 < \alpha < 1$. L'analisi svolta nel paragrafo 1 mostra che questo problema ha infinite soluzioni.

(b) La regolarità di F non è sufficiente ad assicurare la prolungabilità della soluzione più di quanto è garantito dal Teorema 2.1. Infatti, il problema

$$\begin{cases} x' = |x|^2 \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

ha la soluzione $\phi(t) = 1/(1-t)$; se $b > 0$ e $R = \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : |t| \leq a, |x-1| \leq b\}$ si ha, qualunque sia a,

$$\frac{b}{M} = \frac{b}{(b+1)^2} < 1 \qquad \forall b > 0.$$

Il problema dell'unicità della soluzione (locale) è trattato dal successivo Teorema 2.2. L'enunciato di tale teorema richiede una definizione ulteriore.

Definizione 2.2. Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^2$. Diremo che F, definita in Ω, è lipschitziana rispetto a x uniformemente rispetto a t, e scriveremo $F \in Lip_x(\Omega)$, se esiste una costante $L > 0$ tale che

$$|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2| \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in R.$$

Teorema 2.3. *Sia* $R = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2 : |t - \tau| \leq a, |x - \xi| \leq b\}$. *Supponiamo che* F *sia in* $C(R) \cap Lip_x(R)$, *e sia*

$$M = \max_R |F|, \qquad \alpha = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Allora (PC) ha una sola soluzione in $[\tau - \alpha, \tau + \alpha]$.

La condizione su F richiesta nell'enunciato del precedente teorema è di grande utilità in numerose questioni riguardanti le equazioni differenziali ordinarie.

Corollario 2.3. *Sia* Ω *un aperto di* $\mathbf{R}^2$. *Supponiamo* F *in* $C^1(\Omega)$. *Allora (PC) ha una e una sola soluzione locale per ogni* (τ, ξ) *in* Ω.

Stabilita l'esistenza locale di una soluzione di (PC), si presenta la questione della sua eventuale prolungabilità. A tal fine è utile ricordare il risultato seguente.

Teorema 2.4. *Sia* $R = \{(t, x) \in \mathbf{R}^2 : |t - \tau| \leq a, x \in \mathbf{R}\}$. *Supponiamo che* F *sia in* $C(R)$, *che localmente sia in* $Lip_x(R)$, *e abbia crescita al più lineare in* x, *cioè esistono costanti* A, B *tali che*

$$|F(t, x)| \leq A + B\,|x| \qquad \forall (t, x) \in R.$$

Allora (PC) ha una e una sola soluzione definita nell'intervallo $[\tau - a, \tau + a]$.

Non è difficile mostrare che se $F \in C(R) \cap Lip_x(R)$, allora F ha crescita al più lineare in x. In virtù del risultato precedente, se $F \in C(R) \cap Lip_x(R)$, allora (PC) ha una e una sola soluzione definita nell'intervallo $[\tau - a, \tau + a]$.

Si osservi che se F è in $C^1(\Omega)$ e

$$\sup_\Omega |D_x F| = L < \infty,$$

allora F è in $Lip_x(\Omega)$ con costante L.

Diamo ora alcune indicazioni operative che aiutano nello studio dell'andamento qualitativo delle soluzioni di (1). Supponiamo che Ω sia un aperto connesso di $\mathbf{R}^2$ e che F sia in $C(\Omega)$. Poniamo

$$\begin{aligned}\Omega_+ &= \{(t,x) \in \Omega : F(t,x) > 0\} \\ \Omega_0 &= \{(t,x) \in \Omega : F(t,x) = 0\} \\ \Omega_- &= \{(t,x) \in \Omega : F(t,x) < 0\}.\end{aligned}$$

Osserviamo che se $(\bar{t}, \bar{x})$ è in Ω_+ (risp. in Ω_0, risp. in Ω_-) e ϕ è una soluzione di (1) passante per $(\bar{t}, \bar{x})$, allora ϕ ha in $\bar{t}$ un punto di crescita (risp. stazionario, risp. di decrescita). Infatti, si ha che $\phi'(\bar{t}) = F(\bar{t}, \bar{x}) > 0$ (risp. $= 0$, risp. < 0).

Supponiamo ora che $F \in C^1(\Omega)$ e che ϕ sia soluzione di (1). Allora ϕ è di classe C^2 e

$$\begin{aligned}\phi''(t) &= F_t(t,x) + \phi'(t)\, F_x(t,x) \\ &= F_t(t,x) + F(t,x)\, F_x(t,x).\end{aligned}$$

Il luogo dei punti dove quest'espressione si annulla prende il nome di *luogo dei flessi.*

Esempio 2.5. Si consideri l'equazione

$$x' = t^2 \sin x.$$

L'equazione è a variabili separabili e quindi potrebbe essere ricondotta alle quadrature. Ci proponiamo di studiarne le soluzioni senza ricorrere alla formula risolutiva.

La funzione $F(t,x) = t^2 \sin x$ è di classe $C^\infty(\mathbf{R}^2)$. Quindi il (PC) associato a F ha una e una sola soluzione locale. Poiché

$$\sup_{|t|<M, x \in \mathbf{R}} |F_x(t,x)| = M^2 < \infty,$$

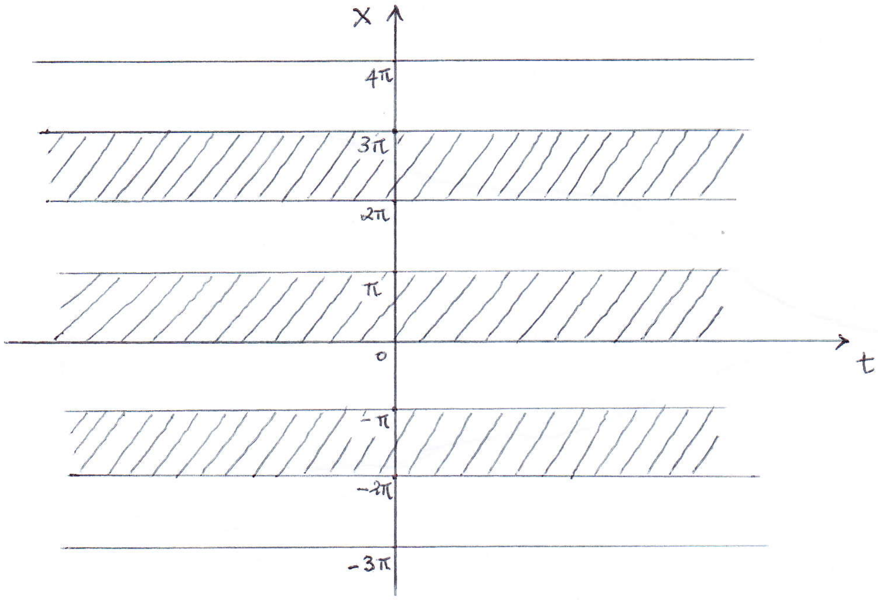
tale soluzione può essere prolungata a tutto $\mathbf{R}$. Si osservi che per ogni k in $\mathbf{Z}$ le funzioni

$$\phi_k(t) = k\,\pi \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

sono soluzioni dell'equazione data. Con le notazioni precedentemente introdotte

$$\begin{aligned}\Omega_+ &= \{\text{parte tratteggiata}\} \\ \Omega_0 &= \{(t,x) \in \mathbf{R}^2 : x = k\,\pi, t \in \mathbf{R}\} \cup \{(0,x) : x \in \mathbf{R}\} \\ \Omega_- &= \mathbf{R}^2 \setminus \{\Omega_+ \cup \Omega_0\}.\end{aligned}$$

La regione Ω_+ è tratteggiata in figura.



Il luogo dei flessi si trova annullando

$$F_t(t,x) + F(t,x)\,F_x(t,x);$$

nel caso in esame un facile conto mostra che tale luogo è dato dall'unione di Ω_0 e del grafico della funzione

$$t = -\frac{2}{(\cos x)^{1/3}}.$$

Il luogo dei flessi è disegnato in figura 2. Sia $0 < \xi < \pi$. Disegnamo il grafico della soluzione, diciamo ϕ, dell'equazione data passante per il punto $(0,\xi)$. Osservato che ϕ non può intersecare le rette $x = 0$ e $x = \pi$ (altrimenti nel punto di intersezione verrebbe meno l'unicità della soluzione), e che ϕ è monotona crescente, si deve avere

$$0 \le A \le B \le \pi,$$

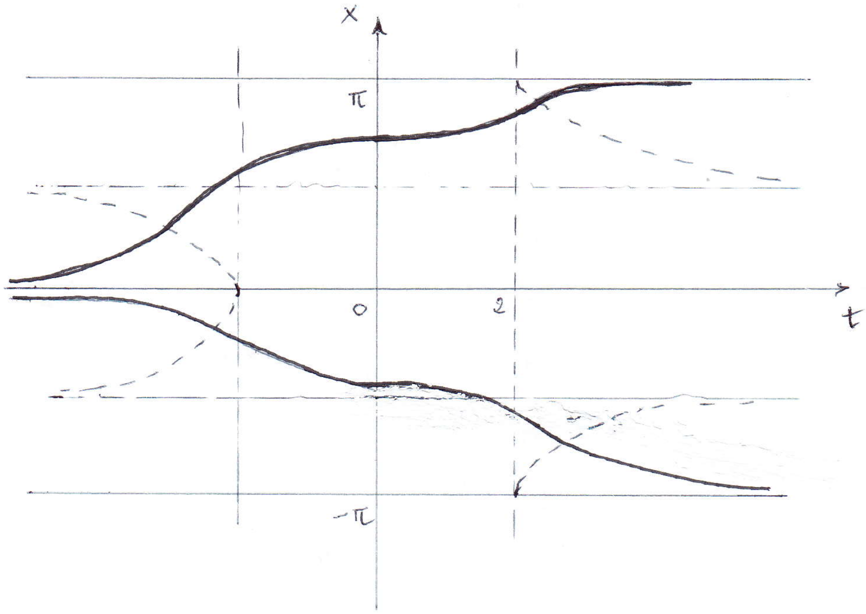
dove abbiamo posto

$$A = \lim_{t\to-\infty} \phi(t) \qquad B = \lim_{t\to+\infty} \phi(t).$$

Si noti che se fosse $A > 0$, dall'equazione si otterrebbe che

$$\lim_{t\to-\infty} \phi'(t) = +\infty;$$

assurdo, perché ϕ è una funzione limitata. In modo analogo si vede che deve essere $B = \pi$. Tenendo conto dei flessi, si vede facilmente che il grafico di ϕ è quello disegnato nella sottostante figura 2.



Per lo studio di situazioni più complicate di quelle esaminate nel precedente esempio, è molto utile la seguente proposizione.

Proposizione 2.6. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbf{R}^2$, F e G due funzioni in $C(\Omega)$ tali che $F < G$ in Ω. Supponiamo che ϕ e ψ siano soluzioni, definite in $[\tau, \alpha)$ dei (PC)*

$$\begin{cases} x' = F(t,x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x' = G(t,x) \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Allora

$$\phi(t) \leq \psi(t) \qquad \forall t \in [\tau, \alpha).$$

Dim. Poniamo $\delta = \psi - \phi$. Se $\delta = 0$ non c'è nulla da dimostrare.

Supponiamo che esista $t_1 > \tau$ tale che $\delta(t_1) \neq 0$. Mostriamo che deve essere $\delta(t_1) > 0$. Infatti, se $\delta(t) < 0$, poniamo

$$\bar{t} = \inf\{t : \tau \leq t < t_1 : \delta(t) < 0\}.$$

È facile dimostrare che

$$\delta(\bar{t}) = 0 \qquad \text{e} \qquad \delta'(\bar{t}) \leq 0,$$

ma questo è assurdo, perché

$$\begin{aligned}\delta'(\bar{t}) &= \psi'(\bar{t}) - \phi'(\bar{t}) \\ &= G(\bar{t}, \psi(\bar{t})) - F(\bar{t}, \phi(\bar{t})) \\ &> 0\end{aligned}$$

per ipotesi. □

È utile raffinare il risultato precedente, sostituendo alla condizione $F < G$ la più debole $F \leq G$. Ce ne occupiamo nel seguente teorema. La dimostrazione richiede un'idea nuova rispetto alla dimostrazione del Proposizione 2.6.

Teorema 2.7. *Sia Ω un aperto connesso di $\mathbf{R}^2$, F e G due funzioni in $C(\Omega) \cap Lip_x(\Omega)$ tali che $F \leq G$ in Ω. Supponiamo che ϕ e ψ siano soluzioni, definite in $[\tau, \alpha)$ dei (PC)*

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = G(t, x) \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Allora

$$\phi(t) \leq \psi(t) \qquad \forall t \in [\tau, \alpha).$$

Dim. Per ogni intero positivo n, indichiamo con G_n la funzione definita da

$$G_n = G + \frac{1}{n}.$$

Consideriamo il problema modificato

$$\begin{cases} x' = G_n(t, x) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

e indichiamo con ψ_n la sua soluzione, anch'essa definita, almeno per n sufficientemente grande, sull'intervallo $[\tau, \alpha - \mathrm{e})$ (perché?!?). Si noti, inoltre, che

$$F \leq G < G_n \qquad \text{su } \Omega.$$

Per la Proposizione 2.6 si ha che $\{\psi_n - \phi\}$ è una successione monotona decrescente e non negativa. Sia ψ_∞ definita dalla formula

$$\psi_\infty(t) = \lim_{n \to \infty} \psi_n(t) \qquad \forall t \in [\tau, \alpha).$$

Allora si ha che

$$\lim_{n\to\infty}\big(\psi_n(t)-\phi(t)\big)=\psi_\infty(t)-\phi(t)\geq 0.$$

Per concludere la dimostrazione, è sufficiente mostrare che $\psi_\infty=\psi$.

Sia $\bar{t}>\tau$ tale che $L(\bar{t}-\tau)<1$. Possiamo scrivere che

$$\begin{aligned}|\psi_n(t)-\psi(t)| &\leq \int_\tau^t |G_n(s,\psi_n(s))-G(s,\psi(s))|\, ds\\ &\leq L\int_\tau^t |\psi_n(s)-\psi(s)|\, ds+\frac{t-\tau}{n}\end{aligned}$$

da cui si deduce che

$$\sup_{t\in[\tau,\bar{t}]}|\psi_n(t)-\psi(t)|\leq L\,(\bar{t}-\tau)\sup_{t\in[\tau,\bar{t}]}|\psi_n(t)-\psi(t)|+\frac{\bar{t}-\tau}{n}$$

e infine, avendo supposto che $L(\bar{t}-\tau)<1$,

$$\sup_{t\in[\tau,\bar{t}]}|\psi_n(t)-\psi(t)|\leq\frac{1}{n}\frac{\bar{t}-\tau}{1-L\,(\bar{t}-\tau)}\to 0$$

quando n tende a $+\infty$. Il conto fatto mostra che $\{\psi_n\}$ converge uniformemente a ψ sull'intervallo $[\tau,\bar{t}]$. Iterando il procedimento (farlo per esercizio) si può mostrare che la convergenza è uniforme su tutto $[\tau,\alpha-\mathrm{e}]$. Conseguentemente, $\psi_\infty=\psi$, e il teorema è provato. $\square$

Esempio 2.8. Tracciamo un grafico qualitativo della soluzione, per tempi positivi, del problema

$$\begin{cases} x'=t^2\sin x+t=f(t,x)\\ x(0)=0.\end{cases}$$

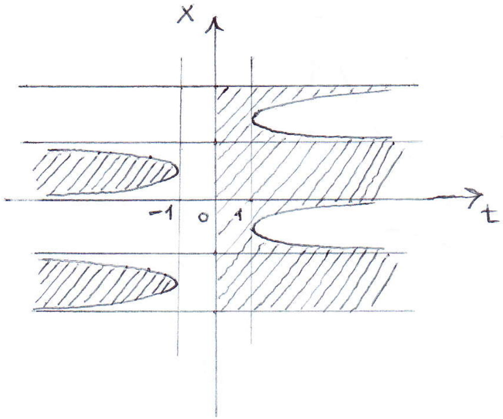
In analogia con l'Esempio 2.5, la soluzione di questo problema di Cauchy è definita su tutto $\mathbf{R}$. Si ha

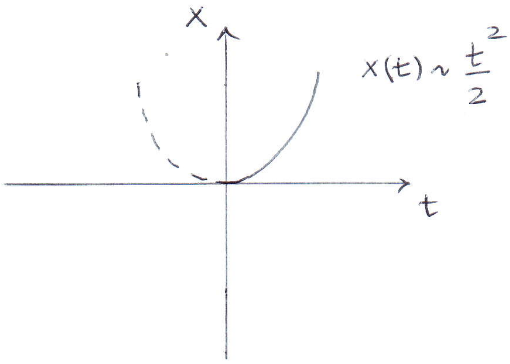
$$\begin{aligned}&\Omega_+=\{\text{parte tratteggiata}\}\\ &\Omega_0=\{\text{asse } x\}\cup\{\text{grafico di } t=-\tfrac{1}{\sin x}\}\\ &\Omega_-=\mathbf{R}^2\setminus\{\Omega_+\cup\Omega_0\}.\end{aligned}$$

Si ha

$$x''(t) = t^4 \sin x \cos x + t^3 \cos x + 2t \sin x + 1,$$

e quindi $x''(0) = 1$. Poiché $x'(0) = 0$, la soluzione cercata ha l'andamento, in un intorno destro sufficientemente piccolo di 0, indicato nella sottostante figura.





Indichiamo con ϕ la soluzione del problema proposto. Per avere informazioni di carattere meno locale sull'andamento qualitativo del grafico di ϕ, osserviamo che

$$g(t,x) = -t^2 + t \leq f(t,x) \leq t^2 + t = h(t,x).$$

Per il Teorema 2.7

$$\psi(t) \leq \phi(t) \leq \eta(t) \qquad \forall t > 0,$$

dove ψ e η sono, rispettivamente, le soluzioni dei problemi

$$\begin{cases} x' = g(t,x) \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x' = g(t,x) \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Tali soluzioni si possono facilmente calcolare, ottenendo:

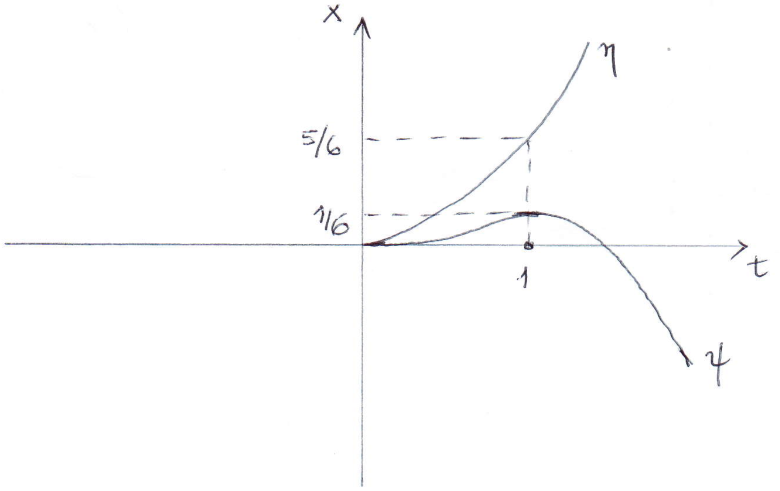
$$\psi(t) = -\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}, \qquad \eta(t) = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2}.$$

I diagrammi di ψ e η sono disegnati in figura 5.

Si osservi ora che ϕ è crescente sul semiasse positivo fino a quando, eventualmente, incontra il diagramma della curva

$$t = -\frac{1}{\sin x}.$$

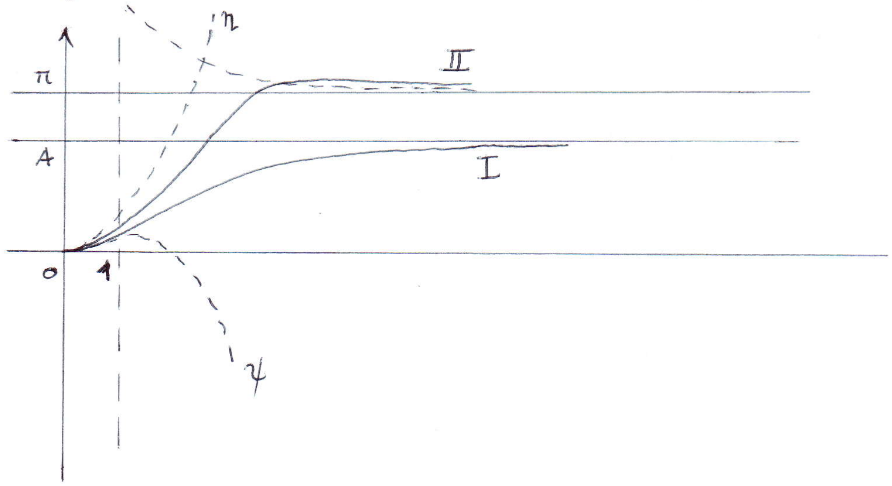
Si pone ora il problema di decidere quali tra i grafici in Figura 6 è quello che rispecchia l'andamento di ϕ.



Si osservi che I, II sono gli unici andamenti qualitativi possibili di ϕ. Ma I non può essere. In tal caso, infatti, si avrebbe $0 < x < A \leq \pi$, che implica

$$\lim_{t \to +\infty} \phi'(t) = +\infty;$$

assurdo. Quindi II è l'andamento corretto.



EQUAZIONI DIFFERENZIALI

LEZIONE 3

Prolungamento delle soluzioni

Def. Siano (φ_1, I_1) e (φ_2, I_2) soluzioni del medesimo

$$(PC) \quad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 . \end{cases}$$

Si dice che (φ_2, I_2) è un **prolungamento** di (φ_1, I_1) se $I_2 \supset I_1$ e la restrizione di φ_2 a I_1 coincide con φ_1.

Def. Una soluzione (φ, I) di PC si dice **massimale** se

(ψ, J) soluzione di (PC) e $\psi = \varphi$ in $I \Rightarrow J = I$.

Notazione. Indichiamo con $Lip_x^{loc}(\Omega)$ lo spazio delle funzioni localmente lipschitziane rispetto a x uniformemente rispetto a t in Ω e con $Lip_x(\Omega)$ lo spazio delle funzioni lipschitziane rispetto a x uniformemente rispetto a t in Ω.

Oss. Siano $f \in \mathscr{C}(\Omega)$ e (φ, I) una soluzione massimale di (PC). Allora I è aperto.

Se, per assurdo, I non fosse aperto a destra, diciamo $I = (c, d]$, consideriamo

$$(PC)' \quad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(d) = \varphi(d). \end{cases}$$

Per il Teorema di Peano $(PC)'$ ha una soluzione $(\psi, [d, d'])$ $(d' > d)$. Allora la funzione

$$\varphi_1 := \begin{cases} \varphi & \text{in } (c, d] \\ \psi & \text{in } (d, d'] \end{cases}$$

risolve (PC) ed è definita in $(c, d']$, che contiene propriamente $(c, d]$, contro la massimalità di (φ, I).

Teorema (esistenza e unicità globale). Siano $-\infty < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$ e $S := [\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}$. Sia $f \in \mathscr{C}(S) \cap Lip_x^{loc}(S)$ con crescita al più lineare in x, cioè esistono due costanti A, B tali che

$$(*) \qquad |f(t,x)| \leq A + B|x|.$$

Allora l'unica soluzione di

$$(PC) \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \,, \end{cases}$$

dove (t_0, x_0) è un qualunque punto in S, è definita in $[\tau_1, \tau_2]$.

Dim. Sia $a > 0$ tale che l'intervallo $[t_0 - a, t_0 + a]$ sia il più grande intervallo centrato in t_0 e contenuto in $[\tau_1, \tau_2]$. Sia poi $b > 0$ e poniamo

$$R := [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b], \qquad M := \max_R |f|.$$

Notiamo che, per $(*)$,

$$|f(t,x)| \leq A + B(|x_0| + b) \qquad \forall (t,x) \in R$$

cosicché

$$\frac{b}{M} \geqslant \frac{b}{A + B|x_0| + Bb}.$$

Scegliamo $b \geqslant \dfrac{A + B|x_0|}{B}$. Allora $\dfrac{b}{M} \geqslant \dfrac{1}{2B}$. Notiamo che abbiamo ottenuto una stima dal basso di $\dfrac{b}{M}$ con una quantità positiva indipendente da (t_0, x_0). Per il Teorema di esistenza e unicità in piccolo, la soluzione di (PC) è definita in $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, dove $\alpha = \min(a, b/M)$. Per l'argomento precedente

$$\alpha \geqslant \min\left(a, 1/(2B)\right).$$

Consideriamo l'intervallo $[t_0, t_0 + \alpha]$. Se $t_0 + \alpha = \tau_2$, abbiamo ottenuto la prolungabilità della soluzione a destra di t_0 fino al punto desiderato τ_2. Se $t_0 + \alpha < \tau_2$, l'argomento precedente mostra che la soluzione può essere prolungata all'intervallo $[t_0, t_0 + 2\alpha]$ (basta prendere il punto $(t_0 + \alpha, \varphi(t_0 + \alpha))$ come punto iniziale di un nuovo problema di Cauchy: qui φ indica la soluzione in $[t_0, t_0 + \alpha]$). Iterando il procedimento si ottiene un prolungamento della soluzione di (PC) all'intervallo $[t_0, \tau_2]$.

Ragionando in modo simile, si prolunga la soluzione di (PC) a sinistra di t_0. $\square$

<u>Oss.</u> La condizione di crescita $(*)$ del teorema precedente è precisa. Ad esempio, se $\varepsilon > 0$ e $x_0 > 0$ il

$$(PC_\varepsilon) \quad \begin{cases} x' = x^{1+\varepsilon} \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione, definita in $(-\infty, 1/(\varepsilon x_0^{\varepsilon}))$ (l'eq. è a variabili separabili!). La funzione

$$f_{\varepsilon}(t,x) := x^{1+\varepsilon},$$

con $\varepsilon = \dfrac{1}{2k+1}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ appartiene a $\mathscr{C}(S) \cap Lip_x^{loc}(S)$ per ogni striscia $S := [\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}$, ma non soddisfa la condizione (*) di crescita al più lineare: la conclusione del teorema non è verificata in questo caso.

Teorema (di prolungamento) Siano $f \in \mathscr{C}(\Omega) \cap Lip_x^{loc}(\Omega)$ e $(t_0, x_0) \in \Omega$ (aperto!). Siano (φ, I) la soluzione massimale di

$$(PC) \quad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e K un cpt. contenuto in Ω. Allora il grafico di φ esce definitivamente da K, per t tendente a t_{min}^+ e per t tendente a t_{max}^- (qui $I = (t_{min}, t_{max})$).

Dim. Ragioniamo per $t \to t_{max}^-$. Per assurdo: se il grafico di φ non uscisse def. da K, esisterebbe $\{t_j\} \subset I$ una successione di punti t.c. $\lim_{j \to +\infty} t_j = t_{max}$ e $(t_j, \varphi(t_j)) \subset K$.

Poiché K è cpt., esiste una sottosuccessione di $\{t_j\}$, che per semplicità di notazione continueremo a denotare con $\{t_j\}$, t.c.

$$(t_j, \varphi(t_j)) \xrightarrow[j \to +\infty]{} (t_{max}, x^*) \in K.$$

Poiché $K \subset\subset \Omega$, esiste un rettangolo R, centrato in (t_{max}, x^*), di semilati a e b, contenuto in Ω.

Poniamo

$$M := \max_R |f|, \qquad \alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

Sia j così grande che $t_{max} - t_j < \frac{\alpha}{2}$. Indichiamo con R' il rettangolo centrato in $(t_j, \varphi(t_j))$ e di semilati $\frac{a}{2}$ e $\frac{b}{2}$. Se j è sufficientemente grande, allora $R' \subset R$. Il

$$(Pc)' \quad \begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_j) = \varphi(t_j) \end{cases}$$

ha, per il Teorema di esistenza e unicità in piccolo, una e una sola soluzione φ_1 definita in $I_1 := [t_j - \alpha', t_j + \alpha']$, dove

$$\alpha' := \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{b/2}{M'}\right\} \quad \text{e} \quad M' := \max_{R'} |f|.$$

Evidentemente $M' \leq M$, cosicché

$$\boxed{\alpha' \geq \min\left\{\frac{a}{2}, \frac{b/2}{M'}\right\} = \frac{\alpha}{2} > t_{max} - t_j.}$$

Per unicità, $\varphi_1 = \varphi$ in $I_1 \cap I$. La funzione

$$\tilde{\varphi} := \begin{cases} \varphi & \text{in } I \\ \varphi_1 & \text{in } I_1 \end{cases}$$

è soluzione di (Pc) in $\tilde{I} := I \cup I_1$. Quindi $(\tilde{\varphi}, \tilde{I})$ è un prolungamento di (φ, I), contro la massimalità di (φ, I). $\square$

Corollario (del Teorema di esistenza e unicità in grande)
Siano $-\infty < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$ e $S := [\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}$. Se $f \in \mathscr{C}(S) \cap \mathrm{Lip}_x(S)$ [attenzione: non $\mathrm{Lip}_x^{loc}(S)$!], allora f ha crescita al più lineare in x e quindi valgono le conclusioni del Teorema di esistenza e unicità globale.

Dim. Per ipotesi, $\exists L > 0$ t.c.

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall (t,x_1), (t,x_2) \in S$$

Posto $x_2 = 0$ nella formula precedente, ricaviamo

$$\begin{aligned} |f(t,x_1)| &\leq L|x_1| + |f(t,0)| \\ &\leq L|x_1| + M \qquad \forall (t,x_1) \in S. \end{aligned}$$

Qui

$$M = \max_{t \in [\tau_1, \tau_2]} |f(t,0)| < \infty$$

perché f è continua. $\square$

Estensione della teoria svolta al caso di sistemi

Siano ora $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ aperto e $\underline{f} : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Per ogni $(t_0, \underline{x}^0) \in \Omega$ consideriamo il

$$(Pc) \begin{cases} \underline{x}' = \underline{f}(t, \underline{x}) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \end{cases}$$

Qui $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\underline{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Scritto per disteso

$$(Pc) \begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n) & x_1(t_0) = x_1^0 \\ \vdots & \vdots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n) & x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

Def. $\underline{f}$ è lipschitziana in D rispetto a $\underline{x}$, uniformemente rispetto a t, se esiste una costante $L > 0$ t.c.

$$|\underline{f}(t, \underline{x}_1) - \underline{f}(t, \underline{x}_2)| \leq L |\underline{x}_1 - \underline{x}_2| \qquad \forall (t, \underline{x}_1), (t, \underline{x}_2) \in \Omega$$

norma euclidea

La definizione è come nel caso scalare, con la norma euclidea al posto del modulo. Analogamente si dà la definizione, per funzioni a valori vettoriali, di funzione loc. lipschitziana. Utilizzeremo, in analogia con il caso scalare, le notazioni $Lip_{\underline{x}}(\Omega)$ e $Lip_{\underline{x}}^{loc}(\Omega)$.

I teoremi di Peano, di esistenza e unicità in piccolo, di esistenza e unicità in grande e di prolungabilità dimostrati in precedenza si estendono, con modifiche

ovvie, al caso vettoriale. A titolo di esempio, consideriamo l'enunciato del Teorema di esistenza e unicità in grande.

Teorema. Siano $-\infty < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$ e $S := [\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}^n$. Sia $\underline{f} \in \mathscr{C}(S) \cap Lip^{loc}_{\underline{x}}(S)$ con crescita al più lineare in $|\underline{x}|$, cioè esistono due costanti A, B tali che

$$(*) \qquad |\underline{f}(t, \underline{x})| \leq A + B|\underline{x}|, \qquad \forall (t, \underline{x}) \in S.$$

Allora l'unica soluzione di

$$(PC) \begin{cases} \underline{x}' = \underline{f}(t, \underline{x}_0) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0, \end{cases}$$

dove $(t_0, \underline{x}_0)$ è un qualunque punto di S, è definita in $[\tau_1, \tau_2]$.

Dim. Identica al caso scalare. $\square$

Esempio. Il (PC) $\begin{cases} x_1' = t + \dfrac{x_2}{1+x_1^2} & x_1(0) = 1 \\ x_2' = t x_1 e^{-t x_2^2} & x_2(0) = 1 \end{cases}$

ha una e una soluzione locale. Infatti, posto

$$\underline{f}(t, x_1, x_2) := \left(t + \frac{x_2}{1+x_1^2}, \; t x_1 e^{-t x_2^2} \right),$$

abbiamo che $\underline{f} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3)$ e il Teorema di esistenza e unicità in piccolo si applica. Posto $0 = \tau_1 < \tau_2$, la funzione $\underline{f}$ è continua e localmente lipschitziana in $[\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}^2$. Inoltre

$$|\underline{f}(t, x_1, x_2)| \leq |t| + \frac{|x_2|}{1+x_1^2} + |t x_1| e^{-t x_2^2}$$

$$\leq |t| + |x_2| + t\,|x_1|$$

$$\leq \tau_2 (1 + |x_1| + |x_2|)$$

$$\leq \tau_2 \left(1 + \sqrt{2}\,|(x_1, x_2)|\right) \qquad \forall (t, x_1, x_2) \in [0, \tau_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Quindi $\underline{f}$ è a crescita al più lineare e la soluzione è prolungabile all'intervallo $[0, \tau_2]$. Facendo variare τ_2 tra i reali positivi, otteniamo la prolungabilità della soluzione a $[0, +\infty)$.

Estensione della teoria svolta al caso delle equazioni di ordine n.

Consideriamo un'equazione di ordine n in forma normale, cioè della forma

$$(*) \qquad x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}),$$

dove $f: \Omega \to \mathbb{R}$, Ω aperto di $\mathbb{R}^{n+1}$. Ad essa si associa il problema di Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} (*) \\ x(t_0) = \xi^0 \quad x'(t_0) = \xi^1 \quad \cdots \quad x^{(n-1)}(t_0) = \xi^{n-1}, \end{cases}$$

dove $\underline{\xi} = (\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^{n-1})$ è un punto di $\mathbb{R}^n$.

Supponiamo che (φ, I) sia una soluzione(*) di (PC) e consideriamo $\underline{\Phi} := (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$. Mostriamo che

---

(*) cioè una f.ne n volte diff.le in I tale che $(t, \varphi(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ è in Ω $\forall t \in I$ e $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$ $\forall t \in I$. I-

$(\underline{\Phi}, I)$ è soluzione del (PC) associato al sistema

$$(PC)' \begin{cases} \underline{X}' = \underline{F}(t, \underline{X}) \\ \underline{X}(t_0) = \underline{\xi} \end{cases}$$

dove $\underline{X} := (X_1, \dots, X_n)$, $\underline{F} := (F_1, \dots, F_n)$

$$F_1(t, X_1, \dots, X_n) := X_2$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1}(t, X_1, \dots, X_n) := X_n$$

$$F_n(t, X_1, \dots, X_n) := f(t, X_1, \dots, X_n).$$

Esplicitamente $(PC)'$ è

$$X_1' = X_2 \qquad X_1(t_0) = \xi^0$$

$$\vdots$$

$$X_{n-1}' = X_n \qquad X_{n-1}(t_0) = \xi^{n-2}$$

$$X_n' = f(t, X_1, \dots, X_n) \qquad X_n(t_0) = \xi^{n-1}$$

ed è immediato constatare che $\underline{\Phi}$ è soluzione di $(PC)'$.

Viceversa, se $\underline{\Psi} = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ risolve $(PC)'$, allora ψ_1 risolve (PC).

La teoria delle equazioni di ordine n in forma normale può essere ricondotta a quella dei sistemi del primo ordine in forma normale.

inoltre $\varphi(t_0) = \xi^0$, $\varphi'(t_0) = \xi^1, \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0) = \xi^{n-1}$.

Ad esempio, vale il seguente teorema.

Teorema (di esistenza e unicità globale) Siano $-\infty < \tau_1 < \tau_2 < +\infty$ e $S := [\tau_1, \tau_2] \times \mathbb{R}^n$. Sia $f \in \mathcal{C}(S) \cap \mathrm{Lip}_{\underline{v}}(S)$, c[illegible] crescita al più lineare in $\underline{v}$, cioè $\exists\, A, B \geq 0$ t.c.

$$|f(t, v_1, \ldots, v_n)| \leq A + B\,|(v_1, \ldots, v_n)| \qquad \forall (t, v_1, \ldots, v_n) \in S.$$

Allora il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = \xi^0 \quad \cdots \quad x^{(n-1)}(t_0) = \xi^{n-1}, \end{cases}$$

dove $(t_0, \xi^0, \ldots, \xi^{n-1})$ è un qualunque punto di S, ha una e una sola soluzione definita in $[\tau_1, \tau_2]$.

Dim. Scende direttamente dall'analogo risultato per sistemi. $\square$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

LEZIONE 4

Equazioni e sistemi lineari

Consideriamo un sistema della forma

(LO) $\qquad \underline{x}' = A(t)\,\underline{x}$

dove $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^t$ e $A : \underset{\subseteq \mathbb{R}}{I} \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$, I essendo un intervallo. Scriviamo

$$A(t) = \left(a_{jk}(t) \right)_{j,k = 1, \dots, n},$$

rappresentando così $A(t)$ come una matrice $n \times n$. Il sistema (LO) si chiama **sistema lineare omogeneo** e, scritto per disteso, è

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)\,x_1 + a_{12}(t)\,x_2 + \dots + a_{1n}(t)\,x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)\,x_1 + a_{n2}(t)\,x_2 + \dots + a_{nn}(t)\,x_n . \end{cases}$$

<u>Oss.</u> Lo spazio delle soluzioni di (LO) è uno **spazio vettoriale**: se $\underline{x}$ e $\underline{y}$ sono soluzioni e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y})' = \alpha \underline{x}' + \beta \underline{y}' = \alpha A(t)\underline{x} + \beta A(t)\underline{y}$$

$$= A(t)(\alpha \underline{x} + \beta \underline{y})$$

Oss. Se $A \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^{n\times n})$, allora per ogni $(t_0, \underline{x}^0)$ in $I \times \mathbb{R}^n$, il problema di Cauchy

$$(PC) \qquad \begin{cases} \underline{x}' = A(t)\,\underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione globale (definita su I)

Dim. Il secondo membro $A(t)\underline{x}$ verifica la stima

$$|A(t)\underline{x}| \leq \|A(t)\| \; |\underline{x}|$$

$$\leq \|A(t)\|_{HS} \; |\underline{x}| .$$

Ricordiamo che

$$\|A(t)\|_{HS} = \Big(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(t)^2 \Big)^{1/2}.$$

Sia $[\tau_1, \tau_2]$ un intervallo compatto contenuto in I. Poiché A è continua su I (equivalentemente le funzioni a_{jk}, $j,k = 1,\dots,n$ sono continue in I) abbiamo

$$\sup_{t\in[\tau_1,\tau_2]} \|A(t)\|_{HS} =: C < +\infty .$$

Perciò

$$|A(t)\underline{x}| \leq C\,|\underline{x}| \qquad \forall (t,\underline{x}) \in [\tau_1,\tau_2]\times\mathbb{R}^n .$$

Per il Teorema di esistenza e unicità in grande, esiste una e una sola soluzione di (PC) definita in $[\tau_1,\tau_2]$.

Facendo variare $[\tau_1, \tau_2]$ in I si ottiene la tesi.

Teorema. Sia $A \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}^{n\times n})$. Allora lo spazio vettoriale delle soluzioni di (LO) ha dimensione n.

Dim. Indichiamo con $\mathcal{S}$ lo spazio vettoriale delle soluzioni di (LO) e con T l'applicazione che alla soluzione $\underline{\varphi}$ di (LO) fa corrispondere il vettore $\underline{\varphi}(t_0)$, dove t_0 è un punto fissato di I. Evidentemente

$$T: \mathcal{S} \to \mathbb{R}^n$$

e gode delle proprietà seguenti:

(i) T è lineare: ovvio

(ii) T è iniettiva. Poiché T è lineare è sufficiente mostrare che se $T\underline{\varphi} = \underline{0}$, allora $\underline{\varphi} \equiv 0$ in I. Il

$$(PC) \quad \begin{cases} \underline{x}' = A(t)\,\underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{0} \end{cases}$$

ha l'unica soluzione nulla (la funzione identicamente nulla è soluzione; in virtù dell'unicità dimostrata in precedenza, essa è l'unica soluzione). Se $T\underline{\varphi} = \underline{0}$, allora $\underline{\varphi}$ è soluzione e $\underline{\varphi}(t_0)\ (= T\underline{\varphi}) = \underline{0}$. Quindi $\underline{\varphi} = \underline{0}$

(iii) T è suriettiva. Infatti, dato $\underline{x}^\circ \in \mathbb{R}^n$, il

$$(PC) \quad \begin{cases} \underline{x}' = A(t)\,\underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^\circ \end{cases}$$

ha una (e una sola) soluzione $\underline{\varphi}$ e $T\underline{\varphi} = \underline{x}_0$.

Quindi T è un isomorfismo e dunque $\dim \mathcal{S} = n$ $\square$

Def. Siano $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ funzioni definite sul medesimo intervallo I a valori in $\mathbb{R}^n$. La matrice

$$W(t) := [\,\underline{\varphi}^1(t) \cdots \underline{\varphi}^n(t)\,] \qquad \forall t \in I$$

(ottenuta accostando i vettori colonna $\underline{\varphi}^1(t), \dots, \underline{\varphi}^n(t)$) si chiama **matrice wronskiana** (associata a $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$). Si chiama **wronskiano** di $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ la funzione (scalare)

$$w(t) := \det W(t) \qquad \forall t \in I.$$

Es. Siano $\quad \underline{\varphi}^1(t) := \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \end{bmatrix}, \quad \underline{\varphi}^2(t) := \begin{bmatrix} t|t| \\ 2|t| \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Il wronskiano di $\underline{\varphi}^1$ e $\underline{\varphi}^2$ è identicamente nullo in $\mathbb{R}$:

$$w(t) = \det \begin{bmatrix} t^2 & t|t| \\ 2t & 2|t| \end{bmatrix} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che, tuttavia, $\underline{\varphi}^1$ e $\underline{\varphi}^2$ sono linearmente indipendenti (come elementi, ad esempio, dello spazio vettoriale $\mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R}^2)$). Infatti, se c_1, c_2 sono costanti tali che

$$c_1 \underline{\varphi}^1(t) + c_2 \underline{\varphi}^2(t) = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

allora deve essere $c_1 + c_2 = 0$ (ottenuta ponendo $t=1$ nella precedente) e $c_1 - c_2 = 0$ (... $t=-1$ ...), da cui $c_1 = c_2 = 0$.

__Oss.__ Se $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ sono funzioni linearmente dipendenti in I, allora esistono $c_1, \dots, c_n$ non tutte nulle tali che

$$\begin{cases} c_1 \varphi_1^1(t) + \dots + c_n \varphi_1^n(t) = 0 \\ \vdots \\ c_1 \varphi_n^1(t) + \dots + c_n \varphi_n^n(t) = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Quindi $w(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ (w è il wronskiano di $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$).

Quindi l'annullarsi del wronskiano di $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ su I è condizione necessaria (ma non sufficiente!) per la dipendenza lineare di $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$.

Nel caso in cui $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ siano soluzioni in I della medesima equazione (LO), si può dire di più.

__Teorema__ CNS affinché n soluzioni su I di una medesima equazione (LO) siano linearmente indipendenti è che

$$w(t) \neq 0 \qquad \forall t \in I$$

($w(t)$ è il wronskiano in t delle n soluzioni).

__Dim.__ Siano $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ soluzioni di (LO) in I.

Se $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ sono linearmente indipendenti, allora $w(t) \neq 0 \ \forall t \in I$.

Infatti se per assurdo esistesse $t_0 \in I$ t.c. $w(t_0) = 0$, allora il sistema

$$c_1 \underline{\varphi}^1(t_0) + \dots + c_n \underline{\varphi}^n(t_0) = \underline{0}$$

ammetterebbe una soluzione $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ non nulla. La funzione $\bar{c}_1 \underline{\varphi}^1 + \dots + \bar{c}_n \varphi^n$ sarebbe una soluzione dell'eq. (LO) che si annulla in t_0. Per l'unicità della soluzione del

$$(PC) \begin{cases} \underline{x}' = A(t)\underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{0} \end{cases}$$

si avrebbe $\bar{c}_1 \underline{\varphi}^1 + \dots + \bar{c}_n \underline{\varphi}^n \equiv 0$ in I, in contraddizione con il fatto che $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ sono linearmente indip.

Viceversa, se $w(t) \neq 0 \ \forall t \in I$, allora $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ sono linearmente indip. Se non lo fossero esisterebbero $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_n$ non tutte nulle t.c. $\bar{c}_1 \underline{\varphi}^1 + \dots + \bar{c}_n \underline{\varphi}^n \equiv 0$
In particolare, il sistema

$$c_1 \underline{\varphi}^1(t_0) + \dots + c_n \underline{\varphi}^n(t_0) = 0$$

avrebbe una soluzione non nulla e quindi il suo determinante $w(t_0)$ dovrebbe essere nullo.
(Qui t_0 è un pto scelto arbitrariamente in I).

$\square$

N.B. Se $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ sono soluzioni di (LO) e $t_0 \in I$, allora

$$w(t_0) \neq 0 \iff w(t) \neq 0 \quad \forall t \in I.$$

Consideriamo il sistema lineare non omogeneo

$$\text{(LNO)} \qquad \underline{x}' = A(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t), \qquad \forall t \in I$$

dove A è come sopra e $\underline{b}: I \to \mathbb{R}^n$.

Se $\underline{b} \neq \underline{0}$, le soluzioni di (LNO) non costituiscono uno spazio vettoriale.

<u>Oss.</u> Sia $\underline{\psi}^*$ una soluzione (arbitrariamente scelta) di (LNO). Allora tutte e sole le soluzioni di (LNO) sono della forma

$$\underline{\psi} = \underline{\varphi} + \underline{\psi}^*,$$

dove $\underline{\varphi}$ è soluzione di (LO).

<u>Oss.</u> Se $A \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^{n\times n})$ e $\underline{b} \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^n)$, allora per ogni $t_0 \in I$

$$\text{(PC)} \quad \begin{cases} \underline{x}' = A(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione definita in tutto I

La dim. è simile a quella per (LO).

<u>Problema:</u> data (LNO) con $A \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^{n\times n})$ e $\underline{b} \in \mathscr{C}(I; \mathbb{R}^n)$, determinare una soluzione $\underline{\psi}^*$ di (LNO) e una base $\underline{\varphi}^1, \dots, \underline{\varphi}^n$ di soluzioni della (LO) associata.

Una base di sol. di (LO) si chiama anche sistema fondamentale di soluzioni di (LO)

Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

$$\text{(LOCC)} \qquad \underline{x}' = A\,\underline{x},$$

dove $A \in M_n(\mathbb{R})$. Le soluzioni di questo sistema si possono convenientemente esprimere mediante l'esponenziale di tA, che ora definiremo.

Def. Sia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. L'esponenziale di T è

$$e^T := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{T^k}{k!}$$

Controlliamo che la serie precedente sia convergente in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Osserviamo che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left|\left|\left| \frac{T^k}{k!} \right|\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|||T|||^k}{k!} = e^{|||T|||} < +\infty$$

Mostriamo che la successione delle somme parziali $S_m := \sum_{k=0}^{m} \frac{T^k}{k!}$ è di Cauchy in $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Infatti, se $p < q$

$$|||S_q - S_p||| = \left|\left|\left| \sum_{k=p+1}^{q} \frac{T^k}{k!} \right|\right|\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} \frac{|||T|||^k}{k!} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0 .$$

Poiché $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ è di Banach, la successione $\{S_m\}$ risulta convergente a un elemento di $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, che denotiamo con e^T.

Osserviamo che se $A \in M_n(\mathbb{R})$ rappresenta l'operatore T rispetto a una base di $\mathbb{R}^n$, allora e^T è rappresentato, nella medesima base, da $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Esempi: (i) $A := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Un semplice calcolo mostra che $A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$ e quindi

$$S_m = \Big(\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_n^k}{k!}\Big)$$

Ovviamente

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda_j^k}{k!} \xrightarrow[m\to+\infty]{} e^{\lambda_j} \qquad j=1,\dots,n$$

La convergenza di S_m a e^A equivale alla convergenza (in $\mathbb{R}$) di ciascun coefficiente di S_m al corrispondente coefficiente di e^A. Perciò

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{bmatrix}.$$

(ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Poiché $A^2 = 0$, abbiamo

$$e^A = I + A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Questo esempio si generalizza, mutatis mutandis, a tutte le matrici nilpotenti di $\mathbb{R}^n$.

(iii) Supponiamo che A abbia un sistema completo di autovettori $\underline{h}^1, \dots, \underline{h}^n$ associato agli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. La matrice

$$S = [\underline{h}^1 \cdots \underline{h}^n]$$

ottenuta giustapponendo i vettori colonna $\underline{h}^1, \dots, \underline{h}^n$, diago-

nalizza A:

$$S^{-1}AS = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$$

[abbiamo $S\underline{e}_j = \underline{h}^j$]. allora

$$e^A = S e^D S^{-1}$$

Infatti

$$A^K = (SDS^{-1})^K = (SDS^{-1})(SDS^{-1}) \cdots (SDS^{-1})$$

$$= SD^K S^{-1}$$

e quindi

$$e^A = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{A^K}{K!} = \lim_{m \to +\infty} \sum_{K=0}^{m} \frac{A^K}{K!} = \lim_{m \to +\infty} S\Big(\sum_{K=0}^{m} \frac{D^K}{K!}\Big) S^{-1}$$

$$= S e^D S^{-1}.$$

Teorema Sia $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Valgono

(i) $e^{(s+t)A} = e^{sA} e^{tA} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

(ii) $\det e^{tA} = e^{t \,\mathrm{tr} A} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(iii) $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$

Dim Dimostriamo solo (iii). La tesi può essere equivalentemente riscritta come segue

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} - e^{tA} A \right\| = 0$$

Indicato con $I(h)$ l'argomento della norma, abbiamo

$$I(h) = e^{tA} \left[\frac{e^{hA} - I}{h} - A \right]$$

$$= e^{tA} h \sum_{k=2}^{+\infty} h^{k-2} \frac{A^k}{k!}.$$

Perciò

$$|||I(h)||| \leqslant |||e^{tA}|||\ |h| \sum_{k=2}^{+\infty} |h|^{k-2} \frac{|||A|||^k}{k!}$$

$$\text{(ad es. se } |h|<1) \leqslant e^{|t|\,|||A|||}\ |h| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|||A|||^k}{k!}$$

$$= C\ |h|$$

con C indip. da h. La tesi segue. □

Teorema Per ogni (vettore colonna) $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$, la funzione

$$\underline{\varphi}(t) = e^{tA}\underline{c}$$

è soluzione dell'eq. (LOCC) su tutto $\mathbb{R}$.

Dim. Utilizzando la (iii) del teorema precedente

$$\underline{\varphi}'(t) = \frac{d}{dt} e^{tA}\underline{c} = A e^{tA}\underline{c} = A\underline{\varphi}(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

□

Conseguentemente, l'unica soluzione di

$$(PC) \begin{cases} \underline{x}' = A\underline{x} \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \end{cases}$$

è $\underline{\varphi}(t) = e^{(t-t_0)A}\underline{x}^0$, come si verifica direttamente.

[Ricordiamo che, come conseguenza del punto (i) del teorema precedente $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$ e $e^{0\cdot A} = I$ dalla def. di esponenziale].

Esempio. Determinare un sistema fondamentale di soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + 6x_3 \\ x_3' = x_2 - x_3 \end{cases} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

La matrice A ha autovalori $0, 3, -3$ e autovettori associati

$$\underline{h}^1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{h}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{h}^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La matrice $S = [\underline{h}^1 \ \underline{h}^2 \ \underline{h}^3]$ diagonalizza A:

$$D := \operatorname{diag}(0, 3, -3) = S^{-1} A S$$

$$\Rightarrow \quad e^{tA} = S e^{tD} S^{-1}$$

Osserviamo che $S \underline{e}_j = \underline{h}^j \Rightarrow S^{-1} \underline{h}^j = \underline{e}_j$ e

$$e^{tA} \underline{h}^j = S e^{tD} S^{-1} \underline{h}^j = S e^{tD} \underline{e}_j = S e^{t\lambda_j} \underline{e}_j$$
$$= e^{t\lambda_j} \underline{h}^j$$

Poniamo

$$\underline{\varphi}^1(t) = e^{t \cdot 0} \underline{h}^1, \quad \underline{\varphi}^2(t) = e^{3t} \underline{h}^2, \quad \underline{\varphi}^3(t) = e^{-3t} \underline{h}^3;$$

$\underline{\varphi}^1, \underline{\varphi}^2, \underline{\varphi}^3$ sono soluzioni per il teorema precedente.

Esse sono linearmente indipendenti perché

$$w(t) = \det \left[e^{t \cdot 0} \underline{h}^1 \quad e^{3t} \underline{h}^2 \quad e^{-3t} \underline{h}^3 \right]$$

e $\underset{\det S}{\underset{\|}{w(0)}} \neq 0$ (e quindi $w(t) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$).

Sistemi lineari non omogenei a coefficienti costanti

(LNOCC) $\quad \underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}(t)$

dove $\underline{b}(t) \in \mathbb{R}^n \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Teorema. Per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ la funzione

$$\underline{\psi}^*(t) := \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, \underline{b}(s)\, ds$$

è una soluzione particolare di (LNOCC).

[Se $\underline{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ è continua, poniamo

$$\int_{t_0}^{t} \underline{f}(s)\, ds := \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s)\, ds, \ldots, \int_{t_0}^{t} f_n(s)\, ds \right) \Big]$$

Dim.
$$(\underline{\psi}^*)'(t) = e^{(t-t)A}\, \underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} e^{(t-s)A}\, \underline{b}(s)\, ds$$
$$= \underline{b}(t) + \int_{t_0}^{t} A\, e^{(t-s)A}\, \underline{b}(s)\, ds$$
$$= \underline{b}(t) + A \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, \underline{b}(s)\, ds$$
$$= \underline{b}(t) + A\, \underline{\psi}^*(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \qquad \square$$

Corollario. L'unica soluzione di (PC) $\begin{cases} \underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}(t) \\ \underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \end{cases}$
è data da

$$\underline{\varphi}(t) = \underbrace{e^{(t-t_0)A}\, \underline{x}^0}_{\text{sol. (LO)}} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}\, \underline{b}(s)\, ds}_{\underline{\psi}^*(t)}$$

Dim. Ovvia conseguenza delle precedenti formule. $\square$

Esempio. Con riferimento al sistema dell'esempio precedente, risolvere

$$(PC)\ \begin{cases} x_1' = x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 + 6x_3 \\ x_3' = x_2 - x_3 + \sin t \end{cases} \qquad \underline{x}' = A\underline{x} + \underline{b}(t)$$

$$\underline{x}(t_0) = \underline{x}^0 \qquad \text{con } \underline{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin t \end{bmatrix}$$

Conviene determinare c_1, c_2, c_3 (funzioni su $\mathbb{R}$) t.c.

$$\underline{b}(s) = c_1(s)\,\underline{h}^1 + c_2(s)\,\underline{h}^2 + c_3(s)\,\underline{h}^3.$$

Fatto questo, avremo la soluzione

$$\underline{\varphi}(t) = e^{(t-t_0)A}\underline{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \Big[c_1(s)\, e^{0(t-s)}\underline{h}^1 + c_2(s)\, e^{3(t-s)}\underline{h}^2 + c_3(s)\, e^{-3(t-s)}\underline{h}^3 \Big]\, ds.$$

Metodo di variazione delle costanti

Illustriamo un metodo che permette, noto un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione lineare omogenea

$$(LO) \qquad \underline{x}' = A(t)\,\underline{x}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

di determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$(LNO) \qquad \underline{x}' = A(t)\,\underline{x} + \underline{b}(t).$$

Sia W la matrice wronskiana di n soluzioni linearmente indipendenti di (LO). Cerchiamo una soluzione di (LNO) della forma $\underline{\psi}^*(t) := W(t)\,\underline{c}(t)$, dove

$\underline{c}(t) \in \mathbb{R}^n$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Assumiamo $\underline{c}$ differenziabile. Notiamo preliminarmente che

$$(*) \qquad W'(t) = A(t)\,W(t) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

[verifica diretta dalla definizione di matrice wronskiana].

Allora

$$\frac{d}{dt}\underline{\psi}^*(t) = W'(t)\,\underline{c}(t) + W(t)\,\underline{c}'(t)$$

$$(\text{per } (*)) \qquad = A(t)\,W(t)\,\underline{c}(t) + W(t)\,\underline{c}'(t)$$

$$= A(t)\,\underline{\psi}^*(t) + W(t)\,\underline{c}'(t)$$

Quindi $\underline{\psi}^*$ verifica (LNO) se e solo se $W(t)\,\underline{c}'(t) = \underline{b}(t)$ e cioè

$$\underline{c}'(t) = W(t)^{-1}\,\underline{b}(t).$$

Ad esempio

$$\underline{c}(t) = \int_{t_0}^{t} W(s)^{-1}\,\underline{b}(s)\,ds.$$

Ricaviamo perciò

$$\boxed{\underline{\psi}^*(t) = W(t)\int_{t_0}^{t} W(s)^{-1}\,\underline{b}(s)\,ds.}$$

Il lato meno entusiasmante di questa formula è la richiesta conoscenza di un sistema fondamentale di soluzioni di (LO).

Equazioni lineari di ordine n

L'equazione lineare (omogenea) di ordine n

$$(*) \qquad x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0,$$

dove $a_j \in \mathscr{C}(I)$, I intervallo di $\mathbb{R}$, è equivalente al sistema

$$(**) \qquad \underline{X}' = A(t)\,\underline{X}, \qquad A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & & & \\ & & & \ddots & \bigcirc & \\ & \bigcirc & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ -a_n(t) & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1(t) \end{bmatrix}$$

Dai risultati discussi in precedenza per i sistemi, si ricava il seguente

Corollario. Siano $a_1, \dots, a_n \in \mathscr{C}(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo.

(i) per ogni $(t_0, \underline{\xi}) \in I \times \mathbb{R}^n$ il problema di Cauchy

$$(Pc) \quad \begin{cases} (*) \\ x(t_0) = \xi^0 \quad x'(t_0) = \xi^1 \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = \xi^{n-1} \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione definita in I

(ii) le soluzioni di $(*)$ costituiscono uno spazio vettoriale di dimensione n

(iii) CNS affinché n soluzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ di $(*)$ siano lin. indip. è che

$$w(t) := \det W(t) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \neq 0 \quad \forall t \in I$$

(iv) per ogni $b \in \mathscr{C}(I)$ e per ogni $(t_0, \underline{\xi}) \in I \times \mathbb{R}^n$ il problema di Cauchy

$$(***) \quad \begin{cases} x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\, x' + a_n(t)\, x = b(t) \\ x(t_0) = \xi^0 \quad x'(t_0) = \xi^1 \quad \dots \quad x^{(n-1)}(t_0) = \xi^{n-1} \end{cases}$$

ha una e una sola soluzione definita in I

(v) le soluzioni dell'equazione non omogenea in $(***)$ costituiscono uno spazio affine che si ottiene dallo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea associata $(*)$ sommando una soluzione dell'eq. non omogenea in $(***)$.

Dim. Immediata dai risultati analoghi per sistemi. □

Equazioni di ordine n a coeff. costanti

La teoria per

$$(\text{ELOCC}) \quad x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

dove $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ $(\mathbb{C})$ può essere dedotta da quella per i sistemi (LOCC), ma non conviene.

Oss. (fondamentale) Sia $\lambda \in \mathbb{C}$: la funzione $e^{\lambda t}$ è sol. di (ELOCC) se e solo se λ è uno zero del polinomio caratteristico di (ELOCC) definito da

$$p(\lambda) := \lambda^n + a_1 \lambda^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

[basta osservare che $\dfrac{d^k}{dt^k}(e^{\lambda t}) = \lambda^k e^{\lambda t}$]

Osserviamo anche che se $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sono numeri complessi a due a due distinti, allora

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t}$$

sono funzioni linearmente indipendenti.

Infatti siano $c_1, \dots, c_n$ costanti tali che

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t} = 0 \qquad \forall t \in I \text{ (intervallo di } \mathbb{R})$$

Allora, differenziando $N-1$ volte, otteniamo che

$$(*) \quad \begin{cases} c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_N e^{\lambda_N t} = 0 \\ c_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_N \lambda_N e^{\lambda_N t} = 0 \\ \vdots \\ c_1 \lambda_1^{N-1} e^{\lambda_1 t} + \dots + c_N \lambda_N^{N-1} e^{\lambda_N t} = 0 \end{cases} \qquad \forall t \in I$$

Poiché

$$\det \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & e^{\lambda_N t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & & \lambda_N e^{\lambda_N t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} e^{\lambda_1 t} & & \lambda_N^{N-1} e^{\lambda_N t} \end{bmatrix} = e^{(\lambda_1 + \dots + \lambda_N)t} \, V(\lambda_1, \dots, \lambda_N),$$

dove $V(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ è il determinante di Vandermonde di $\underbrace{\quad}_{\lambda_1, \dots, \lambda_N}$

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_N) := \det \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & & \lambda_N \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} & & \lambda_N^{N-1} \end{bmatrix},$$

che è non nullo se e solo se $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. sono a due a due

distinti, il sistema (*) ha solo la soluzione nulla. Quindi $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t}$ sono linearmente indip.

Se $N = n$, allora abbiamo trovato una base delle soluzioni di (ELOCC).

Se $N < n$, abbiamo trovato N sol. linearmente indip. e ne dobbiamo trovare altre $n-N$.

Procediamo come segue: dato $\lambda \in \mathbb{C}$, denotiamo con $D-\lambda$ l'operatore differenziale che agisce su u derivabile secondo la formula

$$(D-\lambda)\, u = u' - \lambda \cdot u.$$

Indichiamo con $(D-\lambda)^\nu$ la potenza ν-esima di $D-\lambda$. Ad esempio, se u è due volte derivabile

$$\begin{aligned}(D-\lambda)^2 u &= (D-\lambda)\big((D-\lambda)u\big) = (D-\lambda)(u'-\lambda\cdot u)\\ &= u'' - \lambda u' - \lambda u' + \lambda^2 u\\ &= u'' - 2\lambda u' + \lambda^2 u.\end{aligned}$$

<u>Oss.</u> Se $\lambda \in \mathbb{C}$ e u è ν-volte derivabile, allora

$$(D-\lambda)^\nu (u e^{\lambda t}) = (D^\nu u)\, e^{\lambda t}$$

<u>Dim.</u> Per induzione su ν. Osserviamo che

$$\begin{aligned}(D-\lambda)(u e^{\lambda t}) &= u' e^{\lambda t} + u \lambda e^{\lambda t} - \lambda u e^{\lambda t}\\ &= u' e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Supponiamo vera la proprietà fino a $\nu - 1$. Allora

$$\begin{aligned}(D-\lambda)^\nu (u e^{\lambda t}) &= (D-\lambda)\big((D-\lambda)^{\nu-1}(u e^{\lambda t})\big) \overset{\text{ip. induttiva}}{=} (D-\lambda)\big(u^{(\nu-1)} e^{\lambda t}\big)\\ &\underset{(\nu=1)}{=} u^{(\nu)} e^{\lambda t}\end{aligned}$$

$\square$

Notazione. Denotiamo con $p(D)$ l'operatore lineare che agisce sullo spazio vettoriale delle funzioni n volte derivabili come segue:

$$p(D)u := u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}u' + a_n u.$$

Quindi u risolve (ELOCC) se e solo se $u \in \operatorname{Ker} p(D)$.

Oss. Sia λ una radice di molteplicità m del polinomio caratteristico di (ELOCC). Allora $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, \lambda^{m-1}e^{\lambda t}$ sono soluzioni lin. indip. di (ELOCC).

Dim. Poiché λ è una radice di molteplicità m di p, esiste un polinomio q di grado $n-m$ tale che

$$p(z) = q(z)\,(z-\lambda)^m \qquad \forall z \in \mathbb{R}$$

Corrispondentemente,

$$p(D) = q(D)\,(D-\lambda)^m,$$

dove $q(D)$ è l'operatore lineare che agisce su funzioni $n-m$ volte derivabili che si ottiene sostituendo formalmente D a z nella espressione di $q(z)$. Per l'osservazione precedente

$$\begin{aligned} p(D)(t^k e^{\lambda t}) &= q(D)\left[(D-\lambda)^m (t^k e^{\lambda t})\right] \\ &= q(D)\Big[\underbrace{\frac{d^m}{dt^m}(t^k)}_{=\,0 \ (\text{poiché } k \leq m-1)}\, e^{\lambda t}\Big] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e quindi $e^{\lambda t}, \dots, t^{m-1}e^{\lambda t}$ sono soluzioni. Rimane da verificare la lineare indipendenza.

Per assurdo, se fossero lin. dip., esisterebbero costanti $c_1, \dots, c_m$ non tutte nulle tali che

$$(*) \qquad c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + \dots + c_m t^{m-1} e^{\lambda t} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Il primo membro è della forma $p_1(t) \cdot e^{\lambda t}$, con p_1 polinomio non identicamente nullo di grado al più $m-1$. Poiché p_1 ha, al più, $m-1$ zeri, $(*)$ non può essere vero. □

Teorema Supponiamo che il polinomio caratteristico di

$$(\text{ELOCC}) \qquad x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$$

$[a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})]$ abbia zeri $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ con molteplicità, rispettivamente, $m_1, \dots, m_N$. Allora

$$e^{\lambda_1 t}, \dots, t^{m_k - 1} e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_N t}, \dots, t^{m_N - 1} e^{\lambda_N t}$$

costituiscono una base dello spazio delle soluzioni di (ELOCC).

Dim. In virtù dell'ultima osservazione, le funzioni elencate nell'enunciato sono soluzioni. Rimane da dimostrare che sono linearmente indipendenti.

Per assurdo: se fossero linearmente dipendenti, esisterebbero polinomi $p_1, \dots, p_N$ di gradi $\deg p_j \le m_j - 1$ non tutti nulli tali che

$$(**) \qquad p_1(t) e^{\lambda_1 t} + \dots + p_N(t) e^{\lambda_N t} \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Rimuoviamo dalla somma gli addendi nulli: supponiamo, ad esempio, che tutti i polinomi $p_1, \dots, p_N$ siano non identicamente nulli. Osserviamo che, dividendo per $e^{\lambda_1 t}$, otteniamo

$$p_1(t) + p_2(t)\, e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \dots + p_N(t)\, e^{(\lambda_N-\lambda_1)t} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Applichiamo l'operatore D^{m_1}. Poiché $D^{m_1} p_1(t) \equiv 0$ e

$$D^{m_1}\left(p_k(t)\, e^{(\lambda_k-\lambda_1)t}\right) = q_k(t)\, e^{(\lambda_k-\lambda_1)t} \qquad k=2,\dots,N$$

dove q_k è un polinomio dello stesso grado di p_k, abbiamo

$$q_2(t)\, e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} + \dots + q_N(t)\, e^{(\lambda_N-\lambda_1)t} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

[Notiamo che se p_k è non identicamente nullo, tale è anche q_k]. Moltiplicando l'ultima equazione per $e^{\lambda_1 t}$, otteniamo

$$q_2(t)\, e^{\lambda_2 t} + \dots + q_N(t)\, e^{\lambda_N t} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Iterando il procedimento, otteniamo

$$\tilde{q}_N(t)\, e^{\lambda_N t} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

assurdo, perché $\tilde{q}_N$ ha, al più $m_N - 1$ zeri. $\square$

Esempi: (i) oscillatore armonico classico $x'' + \omega^2 x = 0$, $\omega > 0$: polinomio caratteristico $p(z) = z^2 + \omega^2$, che ha radici $\pm i\omega$. La soluzione generale è allora

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t} \\ &= c_1\left(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)\right) + c_2\left(\cos(-\omega t) + i \sin(\omega t)\right) \\ &= (c_1 + c_2)\cos(\omega t) + i(c_1 - c_2)\sin(\omega t) \end{aligned}$$

(ii) $x'' - \omega^2 x = 0$, $\omega > 0$: polinomio caratteristico $p(z) = z^2 - \omega^2$.

Soluzione generale

$$x(t) = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}$$

(iii) $x'' - 2x' + x = 0 \Rightarrow p(z) = z^2 - 2z + 1$ con radice 1 (doppia).
L'integrale generale è

$$x(t) = e^t (c_1 + c_2 t)$$

Equazioni non omogenee

Problema: determinare una soluzione particolare dell'eq.

$$\text{(ELNOCC)} \qquad x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = b(t)$$

$[a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}\ (\mathbb{C})]$, dove $b \in \mathscr{C}(I)$.

È possibile ricondurre il problema a un analogo problema per il sistema del primo ordine associato.

Esempio. Determinare una soluzione particolare dell'equazione

$$(*) \qquad x'' + \omega^2 x = tg(\omega t)$$

Essa è "equivalente" al sistema

$$(**) \qquad \underline{X}' = A\underline{X} + \underline{b}(t), \qquad \underline{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ tg(\omega t) \end{bmatrix}$$

Una soluzione particolare di $(**)$ è data da

$$\underline{\Psi}^*(t) = W(t) \int_0^t W(s)^{-1}\, \underline{b}(s)\, ds,$$

dove $W(t)$ indica la matrice wronskiana di un sistema fondamentale di soluzioni di $\underline{X}' = A\underline{X}$. Nel caso

in esame

$$W(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad W^{-1}(t) = \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} \omega \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \omega \sin(\omega t) & \cos(\omega t \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow$$

$$\underline{\psi}^*(t) = \begin{bmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ -\omega \sin(\omega t) & \omega \cos(\omega t) \end{bmatrix} \int_0^t \frac{1}{\omega} \begin{bmatrix} -\sin(\omega s)\, tg(\omega s) \\ \cos(\omega s)\, tg(\omega s) \end{bmatrix} ds$$

L'integrale particolare di $(*)$ è la prima componente di $\underline{\psi}^*$,

$$\psi_1^*(t) = -\cos(\omega t)\, \frac{1}{\omega} \int_0^t \frac{\sin^2(\omega s)}{\cos(\omega s)}\, ds + \sin(\omega t)\, \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega s)\, ds.$$